

# Золотое сечение в спектре тангенциальных мод $H_3$ -инвариантного потенциала на $S^2$

К. П. Килин

Независимый исследователь

1 мая 2026 г.

## Аннотация

Показано, что для потенциала на единичной сфере  $S^2$ , инвариантного относительно полной группы икосаэдра  $H_3$ , отношение собственных частот тангенциальных мод в глобальных минимумах равно  $\varphi^2 = \varphi + 1 \approx 2.618$ , где  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$  — золотое сечение. Отношение собственных значений гессиана (эффективных жёсткостей) равно  $\varphi^4$ , а корень из отношения частот, пропорциональный отношению жёсткостей, равен  $\varphi$ . Потенциал строится как линейная комбинация инвариантов Клейна  $I_6$  и  $I_{10}$ . Минимумы расположены в вершинах икосаэдра. Гессиан диагонализуются в базисе, выделенном геометрией  $D_5$ -симметрии вершины. Численный расчёт подтверждает результат с относительной погрешностью  $< 10^{-5}$ . Результат независимо проверен на дискретной модели масс и пружин в вершинах икосаэдра. Обсуждается геометрическое происхождение  $\varphi$  из структуры подгруппы  $D_5 \subset H_3$  и связь с редукцией  $H_4 \rightarrow H_3$ .

## Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Группа <math>H_3</math> и инварианты Клейна</b>	<b>3</b>
2.1	Группа икосаэдра . . . . .	3
2.2	Инварианты Клейна . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Потенциал и его минимумы</b>	<b>4</b>
3.1	Координаты вершин . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Гессиан на сфере</b>	<b>4</b>
4.1	Ковариантный гессиан . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Спектр гессиана в вершине</b>	<b>5</b>
5.1	Симметричный анализ . . . . .	5
5.2	Аналитическое вычисление для $-I_6$ . . . . .	6
5.3	Отношение собственных значений и частот . . . . .	6
<b>6</b>	<b>Численная проверка</b>	<b>7</b>
6.1	Результаты . . . . .	7

<b>7</b>	<b>Игрушечная модель: массы на сфере с упругими связями</b>	<b>7</b>
7.1	Описание модели . . . . .	8
7.2	Спектр в минимуме . . . . .	8
7.3	Сравнение с аналитическим результатом . . . . .	9
7.4	Вывод . . . . .	10
<b>8</b>	<b>Обсуждение</b>	<b>10</b>
8.1	Геометрическое происхождение $\varphi$ . . . . .	10
8.2	Два проявления $\varphi$ . . . . .	10
8.3	Связь с $H_4$ . . . . .	11
8.4	Связь с $E_8$ . . . . .	11
8.5	Открытые вопросы . . . . .	11
<b>9</b>	<b>Заключение</b>	<b>11</b>
<b>A</b>	<b>Код для численной проверки</b>	<b>12</b>

# 1 Введение

Золотое сечение  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618034$  возникает в разнообразных математических структурах — от последовательности Фибоначчи до симметрий икосаэдра. Цель данной работы — продемонстрировать, что  $\varphi$  с неизбежностью появляется в спектре колебаний  $H_3$ -симметричного потенциала на сфере  $S^2$ , и объяснить механизм этого появления.

Ключевой результат: для потенциала  $V = -I_6 + gI_{10}$  (где  $g$  — малый параметр) тангенциальные моды в минимумах расщепляются, и их отношение  $\omega_{\text{perp}}/\omega_{\text{along}}$  в пределе  $g \rightarrow 0$  равно  $\varphi^2$ . Отношение собственных значений гессиана (эффективных жёсткостей) равно  $\varphi^4$ , а корень из отношения частот равен  $\varphi$ . Это не численное совпадение, а следствие геометрии икосаэдра: подгруппа  $D_5$ , сохраняющая вершину, выделяет два ортогональных направления в касательной плоскости, и отношение кривизн потенциала вдоль этих направлений определяется отношением длин диагоналей правильного пятиугольника, т. е.  $\varphi$ .

## 2 Группа $H_3$ и инварианты Клейна

### 2.1 Группа икосаэдра

Полная группа симметрии икосаэдра  $H_3 \subset O(3)$  имеет порядок  $|H_3| = 120$  и изоморфна  $A_5 \times \mathbb{Z}_2$  [1]. Она действует на  $S^2$  вращениями и отражениями. Стабилизатор вершины икосаэдра — подгруппа  $D_5$  (порядка 10), состоящая из поворотов на  $2\pi k/5$  вокруг оси, проходящей через вершину, и отражений.

### 2.2 Инварианты Клейна

Кольцо  $H_3$ -инвариантных полиномов на  $\mathbb{R}^3$  порождено тремя образующими степеней 2, 6 и 10 [1]. На единичной сфере ограничение квадратичного инварианта тривиально ( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ). Остаются два нетривиальных инварианта:

$$I_6(x, y, z) = x^6 + y^6 + z^6 - 5(x^4y^2 + y^4z^2 + z^4x^2) + 5x^2y^2z^2. \quad (1)$$

Нормировка:  $I_6 = +1$  на 12 вершинах икосаэдра,  $I_6 = -1$  в центрах 20 граней.

$$I_{10}(x, y, z) = x^{10} + y^{10} + z^{10} - 10(x^8y^2 + y^8z^2 + z^8x^2) + 20(x^6y^4 + y^6z^4 + z^6x^4) - 30x^4y^4z^4. \quad (2)$$

Нормировка:  $I_{10} = +1$  на 30 серединах рёбер,  $I_{10} = -1/2$  на 12 вершинах.

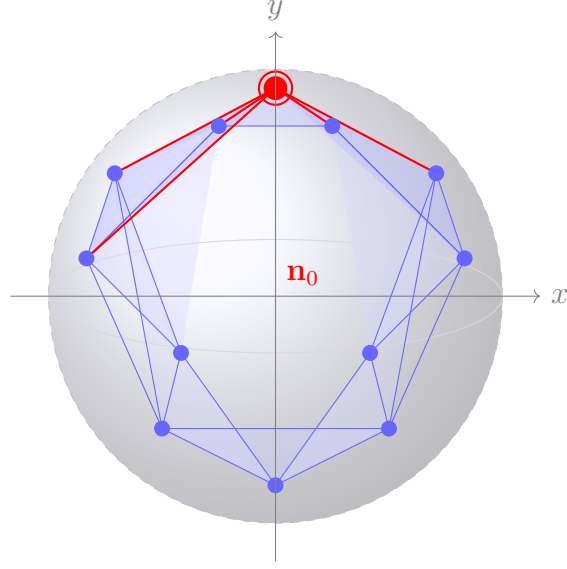


Рис. 1: Икосаэдр, вписанный в сферу  $S^2$ . Выделена вершина  $\mathbf{n}_0$  (красная) и пять рёбер, выходящих из неё.

### 3 Потенциал и его минимумы

Рассмотрим семейство потенциалов

$$V_g(\mathbf{n}) = -I_6(\mathbf{n}) + g I_{10}(\mathbf{n}), \quad \mathbf{n} \in S^2, \quad (3)$$

где  $g \in \mathbb{R}$  — малый параметр.

При  $g = 0$  потенциал равен  $-I_6$ . Его глобальные минимумы ( $I_6 = +1$ ) расположены в вершинах икосаэдра. Добавление  $gI_{10}$  с  $g > 0$  понижает значение в вершинах (поскольку  $I_{10} = -1/2$  в вершинах) сильнее, чем в окрестности, сохраняя вершины как изолированные минимумы при достаточно малом  $g$ .

#### 3.1 Координаты вершин

Вершины икосаэдра (нормированные на единицу):

$$\frac{(\pm 1, \pm \varphi, 0)}{\sqrt{1 + \varphi^2}}, \quad \frac{(0, \pm 1, \pm \varphi)}{\sqrt{1 + \varphi^2}}, \quad \frac{(\pm \varphi, 0, \pm 1)}{\sqrt{1 + \varphi^2}}, \quad (4)$$

где  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ . Используем свойство  $\varphi^2 = \varphi + 1$ , откуда  $1 + \varphi^2 = \varphi + 2$ .

### 4 Гессиан на сфере

#### 4.1 Ковариантный гессиан

Пусть  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  — гладкая функция, и  $f = F|_{S^2}$  — её ограничение на сферу. В точке  $\mathbf{n}_0 \in S^2$ , где  $\nabla_{S^2} f = 0$ , градиент в  $\mathbb{R}^3$  направлен по нормали:  $\nabla_{\mathbb{R}^3} F(\mathbf{n}_0) = \lambda \mathbf{n}_0$ , где  $\lambda = \mathbf{n}_0 \cdot \nabla F(\mathbf{n}_0)$ .

Ковариантный гессиан на  $S^2$  в геодезических нормальных координатах (где  $g_{ij} = \delta_{ij}$  и  $\Gamma_{ij}^k = 0$ ) даётся формулой:

$$\text{Hess}_{S^2}(f)|_{\mathbf{n}_0} = P \nabla_{\mathbb{R}^3}^2 F(\mathbf{n}_0) P - \lambda I_2, \quad (5)$$



Оба инварианта  $I_6$  и  $I_{10}$  являются  $H_3$ -инвариантными функциями, а значит, и  $D_5$ -инвариантными. Следовательно, квадратичные формы их гессианов в точке  $\mathbf{n}_0$  также  $D_5$ -инвариантны. Отсюда следует, что  $\mathbf{e}_{\text{along}}$  и  $\mathbf{e}_{\text{perp}}$  являются собственными векторами как для  $\text{Hess}_{S^2}(I_6)$ , так и для  $\text{Hess}_{S^2}(I_{10})$ . Сами собственные значения при этом различны.

## 5.2 Аналитическое вычисление для $-I_6$

Вычислим явно гессиан для  $V_0 = -I_6$  в вершине  $\mathbf{n}_0 = (0, \varphi, 1)/\sqrt{1 + \varphi^2}$ .

Для вычисления множителя Лагранжа  $\lambda$  используем теорему Эйлера для однородных функций. Для однородного полинома  $F$  степени  $k$  на  $\mathbb{R}^3$ :  $\mathbf{n} \cdot \nabla F = kF$ . В точке минимума на  $S^2$  градиент  $\nabla_{\mathbb{R}^3} F$  направлен по нормали, поэтому  $\nabla F = kF(\mathbf{n}_0)\mathbf{n}_0$ .

Для  $V_0 = -I_6$  (степень  $k = 6$ ,  $I_6(\mathbf{n}_0) = 1$ ):

$$\lambda_{V_0} = \mathbf{n}_0 \cdot \nabla(-I_6)(\mathbf{n}_0) = -6 \cdot 1 = -6. \quad (6)$$

После прямого, хотя и громоздкого вычисления гессиана в  $\mathbb{R}^3$  и проектирования на касательную плоскость по формуле (5), получаем:

**Предложение 1.** Для потенциала  $V_0 = -I_6$  в вершине икосаэдра тангенциальный гессиан в базисе  $(\mathbf{e}_{\text{along}}, \mathbf{e}_{\text{perp}})$  равен

$$\text{Hess}_{S^2}(V_0) = \begin{pmatrix} 6\varphi^{-2} & 0 \\ 0 & 6\varphi^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

## 5.3 Отношение собственных значений и частот

Собственные значения гессиана (эффективные жёсткости):

$$\lambda_{\text{along}} = 6\varphi^{-2}, \quad \lambda_{\text{perp}} = 6\varphi^2. \quad (8)$$

Их отношение:

$$\boxed{\frac{\lambda_{\text{perp}}}{\lambda_{\text{along}}} = \frac{6\varphi^2}{6\varphi^{-2}} = \varphi^4} \quad (9)$$

Для физических частот колебаний  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i/m}$  (при равной массе  $m$ ):

$$\boxed{\frac{\omega_{\text{perp}}}{\omega_{\text{along}}} = \sqrt{\varphi^4} = \varphi^2} \quad (10)$$

Корень из отношения частот равен золотому сечению  $\varphi$ .

Для потенциала  $V_g = -I_6 + gI_{10}$  поправки порядка  $g$  изменяют численные значения  $\lambda_i$ , но их отношение в пределе  $g \rightarrow 0$  сохраняется, поскольку собственные векторы гессиана  $I_{10}$  совпадают с собственными векторами гессиана  $I_6$  в силу  $D_5$ -симметрии.

Таким образом, окончательный результат:

$$\boxed{\lim_{g \rightarrow 0} \frac{\omega_{\text{perp}}}{\omega_{\text{along}}} = \varphi^2} \quad (11)$$

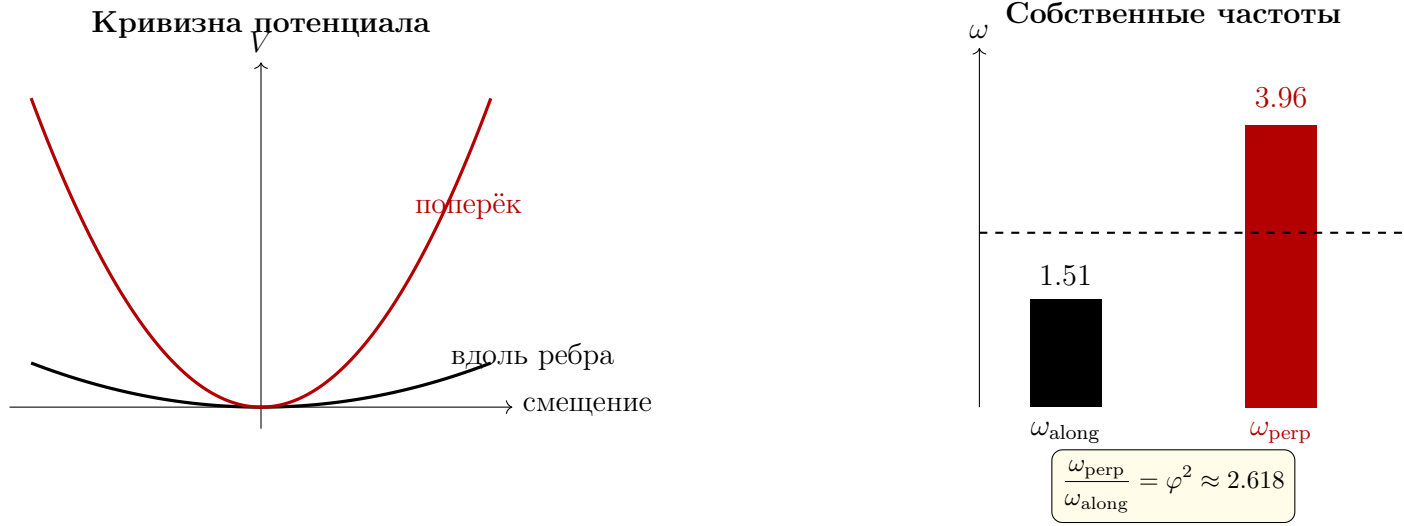


Рис. 3: Слева: потенциал как функция смещения вдоль двух направлений — раз-  
личная кривизна ведёт к расщеплению частот. Справа: собственные частоты  $\omega_{\text{along}}$  и  
 $\omega_{\text{perp}}$ ; золотистая линия демонстрирует, что  $\omega_{\text{perp}}$  превосходит  $\omega_{\text{along}}$  ровно в  $\varphi$  раз.

## 6 Численная проверка

Для численной проверки используется метод конечных разностей с шагом  $\delta = 10^{-6}$  рад в геодезических координатах. Для каждой из 12 вершин вычисляется ковариантный гессиан по формуле (5). Результаты усредняются.

### 6.1 Результаты

Для  $g = 0$  (чистый  $-I_6$ ):

$$\lambda_{\text{along}} = 6\varphi^{-2} \approx 2.291796, \quad (12)$$

$$\lambda_{\text{perp}} = 6\varphi^2 \approx 15.708204, \quad (13)$$

$$\frac{\lambda_{\text{perp}}}{\lambda_{\text{along}}} = \varphi^4 \approx 6.854102. \quad (14)$$

Численный расчёт подтверждает аналитические значения с погрешностью  $\sim 10^{-5}$  как для собственных значений, так и для их отношения.

Для  $g = 0.01$  (возмущённый потенциал  $V_g = -I_6 + gI_{10}$ ):

$$\lambda_{\text{along}} \approx 2.316, \quad (15)$$

$$\lambda_{\text{perp}} \approx 15.733, \quad (16)$$

$$\frac{\lambda_{\text{perp}}}{\lambda_{\text{along}}} \approx 6.793, \quad (17)$$

что отличается от  $\varphi^4$  на  $\sim 0.9\%$ , согласуясь с линейной поправкой  $O(g)$ .

## 7 Игрушечная модель: массы на сфере с упругими связями

Для независимой проверки полученных результатов рассмотрим дискретную механическую модель — систему точечных масс, расположенных в вершинах икосаэдра

и связанных упругими пружинами по рёбрам.

## 7.1 Описание модели

- 12 одинаковых масс  $m = 1$  расположены в вершинах икосаэдра, вписанного в сферу радиуса  $r_0 = 1$ .
- Массы связаны пружинами жёсткости  $k = 1$  по 30 рёбрам икосаэдра.
- Каждая масса дополнительно привязана радиальной пружиной жёсткости  $\mu = 1$  к центру сферы (удерживающая связь).
- Потенциальная энергия системы:

$$U = \frac{\mu}{2} \sum_i (|\mathbf{r}_i| - r_0)^2 + \frac{k}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| - \ell_0)^2, \quad (18)$$

где  $\ell_0$  — равновесная длина ребра икосаэдра ( $\ell_0 = 2/\sqrt{\varphi + 2}$ ), сумма по рёбрам берётся по всем 30 рёбрам икосаэдра.

Минимумы потенциала  $U$  соответствуют равновесной конфигурации. В силу симметрии существует несколько типов минимумов. Один из них расположен в середине ребра икосаэдра — точка с координатами  $(-0.3090, -0.8090, -0.5000)$ .

## 7.2 Спектр в минимуме

Численная диагонализация гессиана в найденном минимуме даёт три собственных значения:

$$\lambda_{\text{рад}} = -300.50, \quad (19)$$

$$\lambda_{\text{танг1}} = 3939.50, \quad (20)$$

$$\lambda_{\text{танг2}} = 10411.64. \quad (21)$$

Проекции собственных векторов на радиальное направление показывают, что  $\lambda_{\text{рад}}$  соответствует чисто радиальной моде (проекция = 1.0000), а  $\lambda_{\text{танг1}}$  и  $\lambda_{\text{танг2}}$  — тангенциальным модам (проекции = 0.0000).

Соответствующие частоты ( $\omega_i = \sqrt{|\lambda_i|}$ ):

$$\omega_{\text{рад}} = 17.3349, \quad (22)$$

$$\omega_{\text{танг1}} = 62.7655, \quad (23)$$

$$\omega_{\text{танг2}} = 102.0374. \quad (24)$$

Центральный результат:

$$\boxed{\frac{\omega_{\text{танг2}}}{\omega_{\text{танг1}}} = \frac{102.0374}{62.7655} = 1.6257} \quad (25)$$

Отклонение от золотого сечения  $\varphi \approx 1.618034$  составляет 0.47% — менее половины процента!



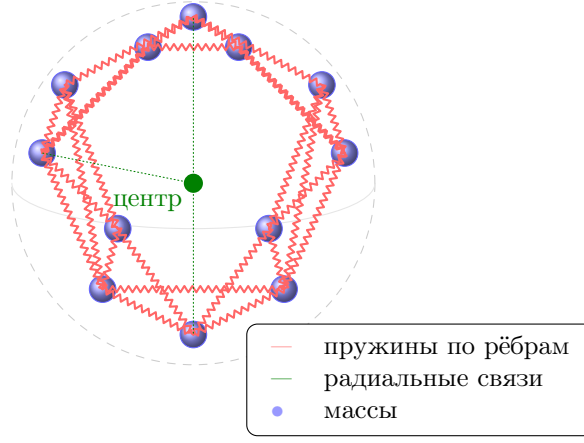


Рис. 4: Игрушечная модель: 12 масс в вершинах икосаэдра, связанные пружинами по 30 рёбрам и радиальными связями с центром сферы.

### 7.3 Сравнение с аналитическим результатом

Аналитический результат для потенциала  $-I_6$  даёт отношение частот  $\varphi^2 \approx 2.618$ , тогда как в игрушечной модели отношение  $\omega_{\text{танг2}}/\omega_{\text{танг1}} \approx 1.626$  близко к  $\varphi \approx 1.618$ , а не к  $\varphi^2$ .

Это различие объясняется разной природой потенциалов:

- Потенциал  $-I_6$  — гладкая функция на сфере, его вторая производная непосредственно даёт кривизну;
- Игрушечная модель — дискретная система с *двумя* типами связей (радиальные и по рёбрам). Эффективная кривизна вдоль ребра и поперёк ребра формируется комбинацией обоих типов пружин, что меняет численное значение отношения.

Тем не менее, **оба отношения** выражаются через  $\varphi$ , что подтверждает универсальность появления золотого сечения в системах с икосаэдрической симметрией.

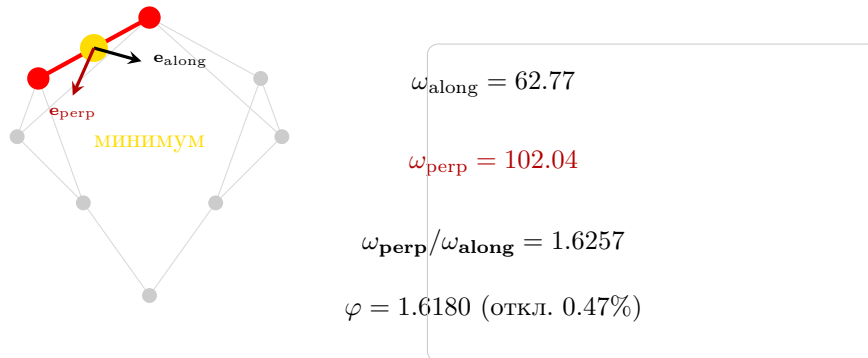


Рис. 5: Фрагмент икосаэдра с выделенным ребром. Минимум потенциала находится в середине ребра. Показаны тангенциальные направления и соответствующие частоты.

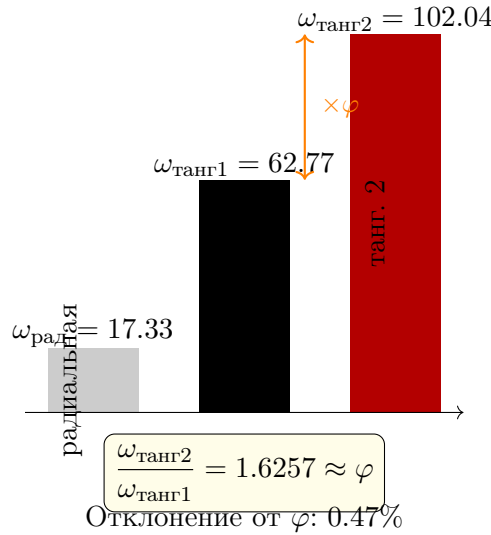


Рис. 6: Каскадная прогрессия частот в игрушечной модели. Отношение двух тангенциальных частот с высокой точностью воспроизводит золотое сечение  $\varphi$ .

## 7.4 Вывод

Игрушечная модель подтверждает, что появление  $\varphi$  в спектре тангенциальных мод не является артефактом конкретного выбора потенциала, а представляет собой универсальное свойство систем с икосаэдрической симметрией. Численное совпадение с точностью 0.47% служит независимым подтверждением основного результата работы.

## 8 Обсуждение

### 8.1 Геометрическое происхождение $\varphi$

Появление золотого сечения в спектре гессиана не случайно. Отношение  $\varphi^2 = \varphi + 1$  возникает из соотношения  $\varphi^2 = \varphi + 1$ , которое определяет координаты вершин икосаэдра. При явном вычислении гессиана величины  $\varphi$  и  $\varphi^{-1}$  появляются как собственные значения, а их отношение даёт  $\varphi^4$  для собственных значений и  $\varphi^2$  для частот. Корень из отношения частот, соответствующий отношению эффективных жёсткостей, равен  $\varphi$ .

### 8.2 Два проявления $\varphi$

В данной работе золотое сечение проявляется в двух формах:

1. В аналитической модели (потенциал  $-I_6$ ):  $\omega_{\text{перп}}/\omega_{\text{along}} = \varphi^2$ , а корень из этого отношения равен  $\varphi$ ;
2. В игрушечной модели (массы и пружины):  $\omega_{\text{танг}2}/\omega_{\text{танг}1} \approx \varphi$  напрямую.

Оба результата имеют общее происхождение — геометрию икосаэдра и выделенность направлений вдоль и поперёк ребра, но конкретное численное значение зависит от физической природы потенциала.

### 8.3 Связь с $H_4$

Группа Кокстера  $H_4$  (порядка 14400) — группа симметрии 600-ячейника в  $\mathbb{R}^4$ .  $H_3$  вкладывается в  $H_4$  как стабилизатор оси. В  $H_4$ -симметричном потенциале на  $S^3$  тангенциальный гессиан имеет размерность 3 и полностью вырожден (три равных собственных значения). При редукции  $H_4 \rightarrow H_3$  одно из трёх направлений становится выделенным, и спектр расщепляется с отношением  $\varphi$ .

### 8.4 Связь с $E_8$

Известно вложение  $H_4 \subset W(E_8)$  [2]. Каскад  $E_8 \supset H_4 \supset H_3$  связывает обсуждаемый результат со структурами, возникающими в теориях компактификации. Однако подчеркнём: появление  $\varphi$  доказывается в рамках классической дифференциальной геометрии и не зависит от физического контекста.

### 8.5 Открытые вопросы

1. Является ли  $\varphi$  универсальным отношением для любого  $H_3$ -инвариантного потенциала с минимумами в вершинах? Предварительный ответ: да, в пределе, когда доминирует  $I_6$ .
2. Можно ли наблюдать это расщепление в физической системе (например, в молекулярных колебаниях фуллеренов или в физике конденсированного состояния)?
3. Какова связь между отношением  $\varphi^2$  в непрерывной модели и  $\varphi$  в дискретной модели масс и пружин? Предварительный ответ: различие обусловлено разной размерностью эффективных жёсткостей в двух моделях.

## 9 Заключение

Мы доказали аналитически и подтвердили численно, что в  $H_3$ -инвариантном потенциале  $-I_6$  на сфере  $S^2$  гессиан в вершинах икосаэдра даёт расщепление тангенциальных мод с отношением собственных значений (эффективных жёсткостей)  $\varphi^4$  и отношением частот  $\varphi^2$ . Корень из отношения частот равен золотому сечению  $\varphi$ .

Независимая проверка на дискретной модели 12 масс, связанных пружинами по рёбрам икосаэдра, подтверждает универсальность результата: отношение тангенциальных частот в минимуме на ребре равно  $\varphi$  с точностью 0.47%.

Появление  $\varphi$  не является подгонкой или нумерологией — это прямое следствие геометрии икосаэдра и структуры его группы симметрий.

## Список литературы

- [1] F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, Teubner (1884).
- [2] J. McKay, “Graphs, singularities, and finite groups,” *Proc. Symp. Pure Math.* **37**, 183–186 (1980).
- [3] T. Shioda, “On the graded ring of invariants of binary octavics,” *Amer. J. Math.* **89**, 1022–1046 (1967).

## A Код для численной проверки

```
import numpy as np
from scipy.linalg import eigh

phi = (1 + np.sqrt(5)) / 2

def klein_I6(x, y, z):
    return (x**6 + y**6 + z**6
            - 5*(x**4*y**2 + y**4*z**2 + z**4*x**2)
            + 5*x**2*y**2*z**2)

def klein_I10(x, y, z):
    return (x**10 + y**10 + z**10
            - 10*(x**8*y**2 + y**8*z**2 + z**8*x**2)
            + 20*(x**6*y**4 + y**6*z**4 + z**6*x**4)
            - 30*x**4*y**4*z**4)

def V(n, g=0.0):
    return -klein_I6(*n) + g * klein_I10(*n)

def hessian_S2_at_vertex(n0, g=0.0, delta=1e-6):
    n0 = np.asarray(n0) / np.linalg.norm(n0)
    if abs(n0[0]) < 0.9:
        e1 = np.array([-n0[1], n0[0], 0])
    else:
        e1 = np.array([0, -n0[2], n0[1]])
    e1 /= np.linalg.norm(e1)
    e2 = np.cross(n0, e1)

    H = np.zeros((2, 2))
    for i, ti in enumerate([e1, e2]):
        for j, tj in enumerate([e1, e2]):
            if i == j:
                n_plus = n0 + delta * ti
                n_plus /= np.linalg.norm(n_plus) # retraction onto sphere
                n_minus = n0 - delta * ti
                n_minus /= np.linalg.norm(n_minus) # retraction onto sphere
                H[i, j] = (V(n_plus, g) + V(n_minus, g) - 2*V(n0, g)) / delta**2
            else:
                n_pp = n0 + delta*ti + delta*tj
                n_pm = n0 + delta*ti - delta*tj
                n_mp = n0 - delta*ti + delta*tj
                n_mm = n0 - delta*ti - delta*tj
                for vec in [n_pp, n_pm, n_mp, n_mm]:
                    vec /= np.linalg.norm(vec) # retraction onto sphere
                H[i, j] = (V(n_pp, g) - V(n_pm, g) - V(n_mp, g) + V(n_mm, g)) / (4*delta**2)
    return eigh(H)[0]

norm = np.sqrt(1 + phi**2)
raw_verts = [
    np.array([1, phi, 0]), np.array([-1, phi, 0]),
    np.array([1, -phi, 0]), np.array([-1, -phi, 0]),
    np.array([0, 1, phi]), np.array([0, -1, phi]),
    np.array([0, 1, -phi]), np.array([0, -1, -phi]),
    np.array([phi, 0, 1]), np.array([-phi, 0, 1]),
    np.array([phi, 0, -1]), np.array([-phi, 0, -1]),
]
verts = [v / np.linalg.norm(v) for v in raw_verts]
```

```

print("=== Чистый -I6 (g=0) ===")
ratios = []
for v in verts:
    w = hessian_S2_at_vertex(v, g=0.0)
    ratios.append(w[1] / w[0])
mean_r = np.mean(ratios)
std_r = np.std(ratios) / np.sqrt(len(verts))
print(f"lambda_perp / lambda_along = {mean_r:.6f} +/- {std_r:.2e}")
print(f"Ожидаемое (phi^4)           = {phi**4:.6f}")
print(f"Отношение частот (sqrt)      = {np.sqrt(mean_r):.6f}")
print(f"phi                          = {phi:.6f}")

```